Vnější kalkulus a duály

vnější součin

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \dots = \frac{(a+b+c+\dots)!}{a!\,b!\,c!\dots} A(\alpha\beta\gamma\dots)$$

vnější a kov. der.

$$d\omega = \nabla \wedge \omega \qquad \mathrm{Tor}\,\nabla = 0$$

$$d_{a_0}\omega_{a_1\dots a_p} = \nabla_{a_0} \wedge \omega_{a_1\dots a_p} = (p+1)\,\nabla_{[a_0}\omega_{a_1\dots a_p]}$$

Hodgeův duál $\Lambda^p M \to \Lambda^{d-p} M$

$$(*\omega)_{a_{p+1}\dots a_d} = \frac{1}{p!}\,{}^{\#}\omega^{a_1\dots a_p}\,\varepsilon_{a_1\dots a_d}$$

$$** = (\mathrm{sign}\, g)(-1)^{p(d-p)}\,\mathrm{id} \qquad *^{-1} = (\mathrm{sign}\, g)(-1)^{p(d-p)} *$$

součiny forem

$$\omega \bullet \sigma = \frac{1}{p!}\,\omega_{a_1\dots a_p}\,{}^{\#}\sigma^{a_1\dots a_p} = \sum_{a_1<\dots<a_p} \omega_{a_1\dots a_p}\,\sigma^{a_1\dots a_p}$$

$$\omega \mathbin{\hat{\wedge}} \sigma = \omega \wedge (*\sigma) = \quad = \omega\bullet\sigma\,\varepsilon = *(\omega\bullet\sigma)$$

Hustotní duál $\Lambda^p M \to \Lambda^{*d-p} M$

$$(\circledast\omega)^{a_1\dots a_p} = \frac{1}{(d-p)!}\,\tilde{\varepsilon}^{-1\,a_1\dots a_d}\,\omega_{a_{p+1}\dots a_d}$$

$$(\circledast\alpha)_{a_{p+1}\dots a_d} = \frac{1}{p!}\,\alpha^{a_1\dots a_p}\,\tilde{\varepsilon}_{a_1\dots a_d}$$

tensor orientace a Levi-Civitův tenzor

$$|\varepsilon| = g^{\frac{1}{2}} \qquad \tilde{\varepsilon} = g^{-\frac{1}{2}}\varepsilon \qquad \varepsilon = g^{\frac{1}{2}}\tilde{\varepsilon}$$

Divergence a rotace a-forem

$$\mathrm{div}\,\omega = *^{-1} d * \omega \qquad \omega \in A^{p+1}M \quad \mathrm{div}\,\omega \in A^p M$$

$$\mathrm{rot}\,\omega = *^{-1} d\omega \qquad \omega \in A^{d-p-1}M \quad \mathrm{rot}\,\omega \in A^p M$$

neboli

$$*\,\mathrm{div}\,\omega = d * \omega$$

$$*\,\mathrm{rot}\,\omega = d\omega$$

vztah ke kov. der. ∇ | $\mathrm{Tor}\,\nabla = 0$

$$(\mathrm{div}\,\omega)_{a_1\dots a_p} = \nabla^n \omega_{a_1\dots a_p n} = (-1)^p \nabla^n \omega_{n a_1\dots a_p}$$

důkaz: viz vztah k konst. d.

alternativní def. div.

$$\nabla\cdot\omega = (-1)^p\,\mathrm{div}\,\omega \qquad (\nabla\cdot\omega)_{a_1\dots a_p} = \nabla^n \omega_{n a_1\dots a_p}$$

$$\delta\omega = -\nabla\cdot\omega = (-1)^{p+1}\,\mathrm{div}\,\omega \qquad \omega \in A^{p+1}M$$

vztah k konst. div

$$\mathrm{div}\,\omega = g^{-\frac{1}{2}\flat}\,\mathrm{div}\,(g^{\frac{1}{2}\sharp}\omega) = g^{-\frac{1}{2}\flat} \circledast d \circledast (g^{\frac{1}{2}\sharp}\omega)$$

$$\mathrm{rot}\,\omega = g^{-\frac{1}{2}\flat} \circledast d\omega$$

vlastnosti

$$dd = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{div} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,d = 0$$

~~Laplace~~ de Rham-Laplaceův op. (poz. def.)

$$\Delta = d\delta + \delta d = [d+\delta]^2 = -[d-\delta]^2$$

vlastnosti

$$*\Delta = \Delta * \qquad d\Delta = \Delta d \qquad \delta\Delta = \Delta\delta$$

Beltrami-Laplaceův op. (neg. def.)

$$\nabla^2 = g^{mn}\nabla_m \nabla_n$$

Laplaceův operátor

$$\underline{\Delta} = d\delta + \delta d = [d+\delta]^2 = -[d-\delta]^2$$

$$= -[d\nabla\cdot + \nabla\cdot d] = -[\nabla\wedge\nabla\cdot + \nabla\cdot\nabla\wedge]$$

$$= (-1)^p [-\operatorname{div} d + d \operatorname{div}]$$

$$= (-1)^p [-\ast^{-1} d \ast d + d \ast^{-1} d \ast]$$

$$= (\operatorname{sign} g)(-1)^{d(p+1)} \operatorname{rot}\operatorname{rot} + (-1)^p d \operatorname{div}$$

Weitzenbockova identita

$$(\Delta\omega)_{a_1\dots a_p} = -\nabla^2 \omega_{a_1\dots a_p}$$

$$+ p\, Ric_{n[a_1} \omega^{n}{}_{a_2\dots a_p]} - \frac{p(p-1)}{2} R_{mn[a_1 a_2} \omega^{mn}{}_{a_3\dots a_p]}$$

důkaz: str 10.8

Diracův operátor na $\mathcal{A}M$

$$D = d - \delta = \nabla\wedge + \nabla\cdot = \nabla\circ$$

∇ bez torze

$\circ$ Clifford multipl.

Lokální Hodgeho rozštěpení

$U \subset M$ topologicky triviální oblast (kontrahovatelnost)

g nedegen. metrika (ne nutně poz. def.)

$\rightarrow \; * \; d \; \delta \; \Delta$

Th: Poincarého lemma

$d\omega = 0 \iff \exists \sigma \quad \omega = d\sigma$ $\qquad \sigma$ potenciál ω

Th: koPoincarého lemma

$\delta\omega = 0 \iff \exists \sigma \quad \omega = \delta\sigma$ $\qquad \sigma$ kopotenciál ω

Důk:

$\delta\omega = 0 \iff *d*\omega = 0 \iff d*\omega = 0 \overset{P.L.}{\iff} *\omega = d\alpha \iff \omega = *^{-1}d\alpha \Rightarrow \omega = \delta\sigma \quad \sigma = \pm *\alpha$

Hodgeho rozštěpení dává potenciál a kopotenciál pro obecnou formu

Th: Lokální Hodgeho rozštěpení

$\omega \in \mathcal{A}^p U$ lze vždy zapsat

$\omega = d\alpha + \delta\beta$

α potenciál ω, β kopotenciál ω

Důk: bez důkazu, viz ale ekvivalence s existencí řešení Δ

Lemma: kalibrační podmínka

potenciál a kopotenciál ω lze vždy zvolit tak, aby

$\delta\alpha = 0 \qquad d\beta = 0$

Důk:

Hodge $\Rightarrow$	$\omega = d\tilde\alpha + \delta\tilde\beta$	, obecně $\delta\tilde\alpha \neq 0 \quad d\tilde\beta \neq 0$
Hodge $\Rightarrow$	$\tilde\alpha = d\kappa + \delta\lambda$	$\tilde\beta = d\mu + \delta\nu$
definuje	$\alpha = \delta\lambda$	$\beta = d\mu$
platí	$d\alpha = d\tilde\alpha \quad \delta\alpha = 0$	$\delta\beta = \delta\tilde\beta \quad d\beta = 0$
$\Rightarrow$	$\omega = d\alpha + \delta\beta$	$\delta\alpha = 0 \quad d\beta = 0$

Lemma:

kalibrační podm. lze naložit i pro Poinc. a koPoinc. lemma

Důk: stejný

Th Řešení nehom. Lapl. rovnice (superpotenciál)

$\forall \omega \in \Lambda^p U \quad \exists \varphi \in \Lambda^p U$

$$\Delta \varphi = \omega$$

φ superpotenciál ω

Důk: věta je ekvivalentní Hodgeovu rozštěpení

Hodge $\Rightarrow$ supot

Hodge $\Rightarrow$ $\omega = d\alpha + \delta\beta$

Hodge $\Rightarrow$ $\alpha = d\kappa + \delta\lambda \quad d\lambda = 0 \qquad \beta = d\mu + \delta\nu \quad \delta\mu = 0$

definuje $\varphi = \lambda + \mu$

$\Delta\varphi = [d\delta + \delta d]\varphi = d\delta\lambda + \delta d\mu = d\alpha + \delta\beta = \omega$

supot $\Rightarrow$ Hodge

supot $\Rightarrow$ $\exists\varphi \quad \omega = \Delta\varphi$

definuje $\alpha = \delta\varphi \quad \beta = d\varphi$

$\Rightarrow$ $\omega = [d\delta + \delta d]\varphi = d\alpha + \delta\beta \qquad \delta\alpha = \delta\delta\varphi = 0 \qquad d\beta = dd\varphi = 0$

(ne)jednoznačnost rozštěpení $\omega = d\alpha + \delta\beta$

α, β nejsou zjevně dány jednoznačně

mají $\alpha \to \alpha + d\psi \quad \beta \to \beta + \delta\psi$

$d\alpha, \delta\beta$ též nejsou jednoznačné

obecně, existuje netriviální Hodgeho rozklad 0

$\exists \alpha, \beta \quad 0 = d\alpha + \delta\beta \quad d\alpha \neq 0 \quad \delta\beta \neq 0$ (+ kalibr. podm. $\delta\alpha = 0 \quad d\beta = 0$)

takové α, β jsou generovány harmonikou

$\exists \varphi \quad \Delta\varphi = 0 \quad \alpha = \delta\varphi \quad \beta = d\varphi$

viz důkaz Hodge $\Rightarrow$ supot

tj. lokálně neplatí implikace

$$\Delta\varphi = 0 \quad \not\Rightarrow \quad d\varphi = 0 \quad \delta\varphi = 0$$

viz příklad

Def Harmoniky

χ je harmonika na U $\equiv$ $\Delta\chi = 0$

$\mathcal{H}^p_\Delta U$ prostor harmonik stupně p operátoru Δ na oblasti U

Př: $\mathbb{E}^3$ $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ $\varepsilon = dx \wedge dy \wedge dz$

$\sigma = xyz\,dz$ $\Delta\sigma = 0$

$\alpha = \delta\sigma = -\nabla\cdot\sigma = -xy$ $\delta\alpha = 0$

$\beta = d\sigma = yz\,dx\wedge dz + xz\,dy\wedge dz$ $d\beta = 0$

$d\alpha = -y\,dx - x\,dy$

$\delta\beta = -\nabla\cdot\beta = y\,dx + x\,dy$

$0 = d\alpha + \delta\beta = d\delta\sigma + \delta d\sigma = \Delta\sigma = 0$

problém

$\Delta\sigma \not\Rightarrow d\sigma = 0 \quad \delta\sigma = 0$

problém

$d\alpha$ a $\delta\beta$ se mohou vyrušit

Globální Hodgeovo rozštěpení

kompaktní orientovatelné riemannovské var.

skalární součin

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int \alpha \wedge * \beta = \int \alpha \cdot \beta \, g^{\frac{1}{2}} \qquad a = b$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0 \qquad a \neq b$$

vlastnosti

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \qquad \langle \alpha, \alpha \rangle > 0 \quad \alpha \neq 0$$

$\langle \, , \rangle$ skal. součin na $AM = \bigoplus_{p=0}^{d} \Lambda^p M$

operátory d, δ, Δ

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle = \langle d\alpha, d\beta \rangle + \langle \delta\alpha, \delta\beta \rangle$$

$d^+ = \delta$ $\quad d, \delta$ sdružené ve smyslu $\langle \, , \rangle$

Δ pos. def. symetrický

Tv: globální harmoniky

1) $\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$ tj $\Delta\gamma = 0 \iff d\gamma = 0 \wedge \delta\gamma = 0$

Důk:

$\Leftarrow$ zřejmé

$\Rightarrow$ $0 = \langle \gamma, \Delta\gamma \rangle = \langle d\gamma, d\gamma \rangle + \langle \delta\gamma, \delta\gamma \rangle$

(ze def. $\langle\, ,\, \rangle$) $\Rightarrow$ $d\gamma = 0$ $\delta\gamma = 0$

2) $\mathcal{H}^p_\Delta M$ má konečnou dimenzi

Důk: bez důkazu

Tv: Hodgeho rozštěpení

$\omega \in \Lambda^p M$ lze vždy zapsat

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$$

γ	harmonická část	$\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$
$d\alpha$	exaktní část	$\alpha \in \Lambda^{p-1} M$ potenciál
$\delta\beta$	koexaktní část	$\beta \in \Lambda^{p+1} M$ kopotenciál

rozštěpení na $d\alpha$, $\delta\beta$, γ je jednoznačné

Důk: existence rozšt. bez důkazu

jednoznačnost rozštěpení z ortogonality harm., exakt. a koexakt. částí

$\langle d\alpha, \delta\beta \rangle = \langle \alpha, \underbrace{\delta\delta\beta}_{0} \rangle = 0$ $\langle d\alpha, \gamma \rangle = \langle \alpha, \underbrace{\delta\gamma}_{0} \rangle = 0$ $\langle \delta\beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \underbrace{d\gamma}_{0} \rangle = 0$

Lemma: kalibrační podmínky

potenciál α a kopotenciál β lze zvolit tak, aby

$\delta\alpha = 0$ $d\beta = 0$ α, β neobsahuje harm. část

Důk: viz lokální Hodge

Hodge $\Rightarrow$ $\omega = d\tilde\alpha + \delta\tilde\beta + \gamma$ $\tilde\alpha = d\kappa + \delta\lambda + \rho$ $\tilde\beta = d\mu + \delta\nu + \sigma$

$\alpha = \delta\lambda$ $\beta = d\mu$ $\Rightarrow$ $d\alpha = d\tilde\alpha$ $\delta\alpha = 0$ α nemá harm., $\delta\beta = \delta\tilde\beta$ $d\beta = 0$ β nemá harm.

$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$

Th: řešení nehom. Lapl. rovnice (superpotenciál)

rovnice

$$\Delta\varphi = \omega$$

má řešení pouze pokud ω nemá harmon. část

pak $\omega = d\alpha + \delta\beta$ kde $\alpha = \delta\varphi$ $\beta = d\varphi$

Důk:

$\exists\varphi$ $\Delta\varphi = \omega \Rightarrow \omega$ bez harm.

$\omega = \Delta\varphi = [d\delta + \delta d]\varphi = d(\delta\varphi) + \delta(d\varphi) \Rightarrow \omega$ nemá harm. část

ω bez harm $\Rightarrow \exists\varphi$ $\Delta\varphi = \omega$

$\omega = d\alpha + \delta\beta$ Hodge $\Rightarrow \alpha = d\kappa + \delta\lambda + \rho$ $\beta = d\mu + \delta\nu + \sigma$ $d\lambda = 0$ $\delta\mu = 0$

$\varphi = \lambda + \mu$ $\Delta\varphi = d\delta\lambda + \delta d\mu = d\alpha + \delta\beta = \omega$

Th. (ko)potenciály pro uzavřené a kouzavřené formy

$d\omega = 0 \Rightarrow \exists\alpha, \rho$ $\omega = d\alpha + \rho$ $\Delta\rho = 0$ a lze požadovat $\delta\alpha = 0$

$\delta\omega = 0 \Rightarrow \exists\beta, \sigma$ $\omega = \delta\beta + \sigma$ $\Delta\sigma = 0$ a lze požadovat $d\beta = 0$

tj.

uzavřená = exaktní + harmonická

kouzavřená = koexaktní + harmonická

Důk: plyne z ortogonality harmonic a (ko)exaktní části

Def: DeRhamova kohomologie

p-tá kohomologická gr. $H^p(M) = \mathcal{A}^p_c M / \mathcal{A}^p_e M$

Ω kohomol. třída $\in H^p(M)$

$\omega \in \mathcal{A}^p_c M$ reprezentant $\Omega \Leftrightarrow \omega \in \Omega$ $[\omega] = \Omega$ $\Omega = \omega + \mathcal{A}^p_e M$

Th: M kompaktní orientovaná riemannovská varieta

$H^p(M) \cong \mathcal{H}^p_\Delta M$

$\Omega \in H^p(M)$ je dána harmon. částí libovolného repr.

tj. $[\omega_1] = [\omega_2] \Rightarrow \omega_1, \omega_2$ mají stejnou harm. část γ $[\omega_i] = [\gamma]$

dává ztotožnění mezi $\Omega \in H^p(M)$ a $\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$: $\Omega = [\gamma]$